Μάθημα 8ο

9-3-2016

• Θεωρήματα Διατήρησης

Μία ερώτηση που προκύπτει από τον ορισμό του έργου για συντηρητικά πεδία, όπου:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A) \quad , \vec{F} = \vec{\nabla} f$$

είναι τι συμβαίνει όταν $f(B) = f(A)$ ή

$$W = 0 \iff \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Παρατήρηση:

Σε ένα συντηρητικό πεδίο δυνάμεων το συνολικό έργο που δαπανάται κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής είναι μηδέν. Το αποτέλεσμα αυτό είναι φυσικά αποδεκτό και θα πει ότι σε κάποια μέρη της διαδρομής καταναλώθηκε ενέργεια και σε κάποια άλλα παράχθηκε. Το συνολικό ποσό ενέργειας που παράχθηκε ισούται με την ενέργεια που καταναλώθηκε.

1) Διατήρηση της Ορμής:

Αν σε ένα υλικό σημείο δεν επιδρούν δυνάμεις η ορμή διατηρείται.

Απόδειξη

Από το 2ο Νόμο του Νεύτωνα γνωρίζουμε ότι:

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \vec{0} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \vec{p} = \vec{c}$, δηλαδή η ορμή διατηρείται (δηλ. διατηρείται το γινόμενο μάζας ταχύτητας).

2) <u>Διατήρηση Στροφορμής:</u>

Ορίζεται ως στροφορμή το διάνυσμα $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$\Rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v})$, όπου $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης και m η μάζα του υλικού σημείου (στροφορμής $\vec{p} = m\vec{v}$)

<u>Φυσική Σημασία Στροφορμής</u>

Η στροφορμή χαρακτηρίζει περιστρεφόμενα συστήματα και καλείται συνήθως γωνιακή ορμή (angular momentum). Χαρακτηρίζει την ορμή ως προς την κίνηση ενός σώματος γύρω από έναν άξονα.
Η διεύθυνση του διανύσματος της στροφορμής συμπίπτει με τον άξονα περιστροφής του σώματος.

<u>Παρατήρηση:</u>

Η έννοια της στροφορμής είναι σημαντική τόσο στην κλασική Μηχανική τόσο και στην Κβαντική.

Για να δω πότε και αν διατηρείται η στροφορμή κοιτάω το:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p}) = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times(m\vec{v}))$$

$$= \frac{d\vec{r}}{dt}\times(m\vec{v}) + \vec{r}\times\frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$= \overbrace{\vec{v}\times(m\vec{v})}^{0} + \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$= \vec{r}\times\vec{F} = \vec{N}$$ <u>η ροπή</u>

Επειδή όταν η ροπή $\vec{N} = \vec{r}\times\vec{F}$ ενός συστήματος είναι μηδέν: $\vec{N} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{0}$ η στροφορμή διατηρείται.

3) Διατήρηση της ενέργειας

Γνωρίζουμε ότι:

$$W=\int_A^B \vec{F}\,d\vec{r}=\int_A^B \vec{F}\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}\,dt}_{d\vec{r}}=\int_A^B \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt$$

• αν η μάζα ενός σώματος είναι σταθερή τότε:

$$\vec{F}=m\frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{δηλαδή} \quad \vec{F}\cdot\vec{v}=m\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}$$

$$\vec{F}\cdot\vec{v}\,dt=m\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}\,dt=m|\vec{v}|\,d|\vec{v}|$$

όπου $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, $d\vec{v}=(dv_1,dv_2,dv_3)$

$$|\vec{v}|\,d|\vec{v}|=v_1dv_1+v_2dv_2+v_3dv_3$$

και τελικά:

$$W=\int_A^B \vec{F}\,d\vec{r}=m\int_A^B (v_1dv_1+v_2dv_2+v_3dv_3)=$$

$$=\frac{m}{2}\left(v_1^2(B)+v_2^2(B)+v_3^2(B)-v_1^2(A)-v_2^2(A)-v_3^2(A)\right)$$

$$=\frac{1}{2}m\left(|\vec{v}|_B^2-|\vec{v}|_A^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}m|\vec{v}|_B^2-\frac{1}{2}m|\vec{v}|_A^2$$

Ορίζω: $\boxed{T=\frac{1}{2}m|\vec{v}|^2}$ ως την κινητική ενέργεια

$$\boxed{W=\int_A^B \vec{F}\,d\vec{r}=T_B-T_A}$$

Αν $\vec{F} = \vec{\nabla} f$, τότε $\boxed{W = f(B) - f(A)}$

Ορίζω ως δυναμικό/δυναμική ενέργεια το $\boxed{V = -f}$
τότε:

$$W = f(B) - f(A) = -V(B) - (-V(A)) = -V(B) + V(A) = -V_B + V_A$$

Τελικά: $-V_B + V_A = T_B - T_A \Leftrightarrow \boxed{T_A + V_A = T_B + V_B}$

Παρατηρήσεις

① Η αρχή διατήρησης της ενέργειας όπως την αποδείξαμε ισχύει για διατηρητικά πεδία δυνάμεων δηλαδή για δυνάμεις που ικανοποιούν την $\boxed{\vec{F} = \vec{\nabla} f}$
Αν το πεδίο δεν είναι διατηρητικό το συνολικό έργο ισούται με την μεταβολή της κινητικής ενέργειας

② Για διατηρητικές δυνάμεις, θα ορίζαμε τη συνάρτηση δυναμικού $\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} V}$

③ Επίσης το πεδίο είναι διατηρητικό, δηλαδή
$\vec{\nabla} \times \vec{F} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = \vec{0}$
Τα πεδία αυτά λέγονται αστρόβιλα, δηλαδή για αστρόβιλα πεδία $\vec{0} = \vec{\nabla} \times \vec{F} \Leftrightarrow$ ενέργεια σταθερή

Παράδειγμα ①

Ομογενές Πεδίο Βαρύτητας

$\vec{F} = -mg\hat{k}$

Αναζητώ μια συνάρτηση ώστε $\vec{\nabla}V = -\vec{F}$ $(V = V(x,y,z))$

$\vec{F} = (0, 0, -mg)$

$-\vec{\nabla}V = \left(-\frac{\partial x}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z}\right)$

$\frac{\partial V}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial V}{\partial z} = mg$

$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \Rightarrow V = V(y, z)$

$\frac{\partial V}{\partial y} = 0 \Rightarrow V = V(z)$

$\frac{\partial V}{\partial z} = mg \Rightarrow V' = mg \Rightarrow \boxed{V = mgz + C}$

Θεωρώ ένα z_0 : $V(z_0) = 0$: $mgz_0 + C = 0 \Rightarrow$
$C = -mgz_0$
Συνολικά $V(z) = mg(z - z_0)$

Παράδειγμα ②

Η ευθύγραμμη κίνηση : $\vec{F} = f(x)\hat{i}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f(x) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Δηλαδή όλες οι ευθύγραμμες κινήσεις, δηλ. οι κινήσεις σε μία διάσταση διατηρούν την ενέργεια (είναι αστρόβιλες)

Δηλαδή για κίνηση σε μία διάσταση μπορώ να γράψω πάντα: $\vec{F} = -\vec{\nabla} V \Rightarrow \boxed{F = -\frac{dV}{dx}}$ ή $\boxed{V = -\int F(x)dx}$

Με τον τρόπο αυτό συνδέεται τη δύναμη σε μία διάσταση και την ενέργεια.

Δηλαδή: $F = -\frac{dV}{dx} = -\frac{dV/dt}{dx/dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dV}{dt} = -F v}$

ταχύτητα

Παράδειγμα 3

Πεδία κεντρικών δυνάμεων

Ορίζετε κεντρικές δυνάμεις αυτές για τις οποίες $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\hat{r} = f(r)\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

$\vec{r}$ διάνυσμα θέσης σε πολικές συντεταγμένες. Για τις δυνάμεις αυτές η στροφορμή και η ενέργεια διατηρούνται. Δηλαδή:

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ ή $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times f(r)\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \vec{0}$

και $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$ (άσκηση)

και άρα μπορώ πάντα να γράψω $\vec{F} = -\vec{\nabla} V(r) = -\frac{dV}{dr}\hat{r}$

Δηλαδή όλες οι κεντρικές δυνάμεις είναι αστρόβιλες, συντηρητικές, διατηρούν ενέργεια και στροφορμή.